1.2 数列的极限

一、数列的定义

定义:按自然数$1,2,3,\cdots$编号依次排列的一列数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots \qquad (1)$$

称为<u>无穷数列</u>,简称<u>数列</u>.其中的每个数称为数列的<u>项</u>,x_n称为<u>通项(一般项)</u>.数列(1)记为$\{x_n\}$.

例如 $1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots;$ $\{(-1)^{n-1}\}$

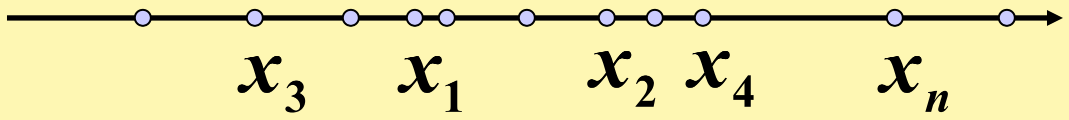
$$a_n = (-1)^{n-1}$$

$$\sqrt{3}, \sqrt{3+\sqrt{3}}, \cdots, \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}, \cdots$$

$$a_{n+1} = \sqrt{3+a_n}$$

注意:

1. 数列对应着数轴上一个点列.可看作一动点在数轴上依次取 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$.



2.数列是整标函数 $x_n = f(n)$.

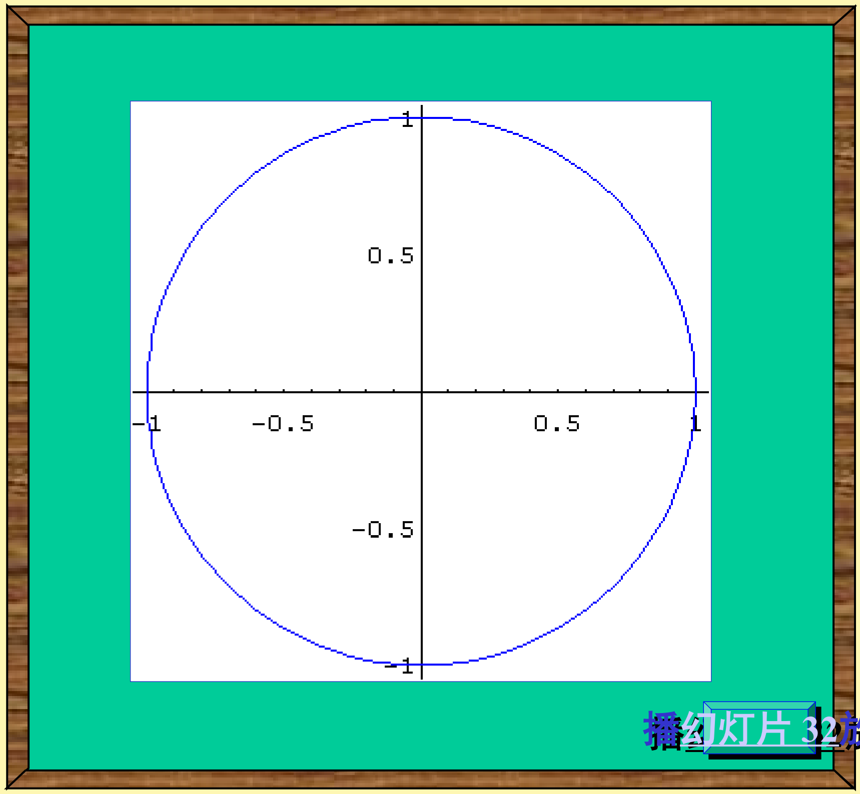
定义域是正整数!

二、引入

1、割圆术：

“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”

——刘徽



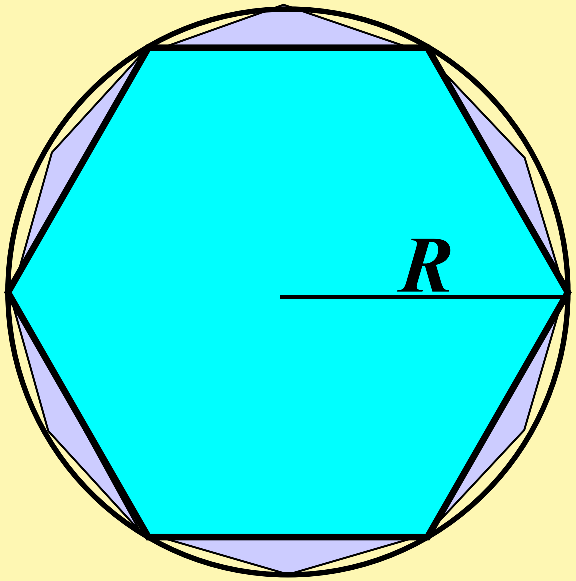
记圆的面积为S

正六边形的面积 A_1

正十二边形的面积 A_2

…… ……

正$6\times 2^{n-1}$形的面积 A_n



$$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots \Rightarrow S$$

2、截丈问题：

“一尺之棰，日截其半，万世不竭”

——《庄子·天下篇》

第一天余下的杖长为 $X_1 = \frac{1}{2}$;

第二天余下的杖长为 $X_2 = \frac{1}{2^2}$;

…… ……

第n天余下的杖长为 $X_n = \frac{1}{2^n}$;

$$X_n = \frac{1}{2^n} \neq 0 \longrightarrow 0$$

三、数列的极限

考察数列$\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\}$当$n\to\infty$时的变化趋势.

问题: 当n无限增大时, x_n是否无限接近于某一确定的数值?如果是,如何确定?

当n无限增大时, $x_n=1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}$无限接近于1.

问题: “无限接近”意味着什么? 距离要多小就有多小! 如何用数学语言刻划它?

$$\left|x_n-1\right| = \left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

$$\left|x_n - 1\right| = \left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

“无限接近”

距离要多小就有多小

给定 $\frac{1}{100}$，要使 $\frac{1}{n} < \frac{1}{100}$，只要 $n > 100$时，有 $\left|x_n - 1\right| < \frac{1}{100}$，

给定 $\frac{1}{1000}$，只要 $n > 1008$时，有 $\left|x_n - 1\right| < \frac{1}{1000}$，

给定 $\frac{3}{10000}$，只要 $n > 3333$ 时，有 $\left|x_n - 1\right| < \frac{3}{10000}$，

给定 $\varepsilon > 0$，只要 $n > N = [\frac{1}{\varepsilon}]$时，有 $\left|x_n - 1\right| < \varepsilon$ 成立

不论 ε 多么小　　ε，δ 一般表示很小的数

Nanjing University of Posts and Telecommunications

定义 如果对于任意给定的正数ε(不论它多么小),总存在正数N,使得对于$n>N$时的一切x_n,不等式$|x_n-a|<\varepsilon$都成立,那么就称常数 a 是数列 x_n 的极限,或者称数列x_n收敛于a,记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \text{或} \, x_n \to a \quad (n\to\infty).$$

如果数列没有极限,就说数列是发散的.

$\varepsilon-N$定义: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow$

$\forall\varepsilon>0,\exists N>0,$当$n>N$时,恒有$|x_n-a|<\varepsilon$

不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 刻画了 x_n 与a的无限接近

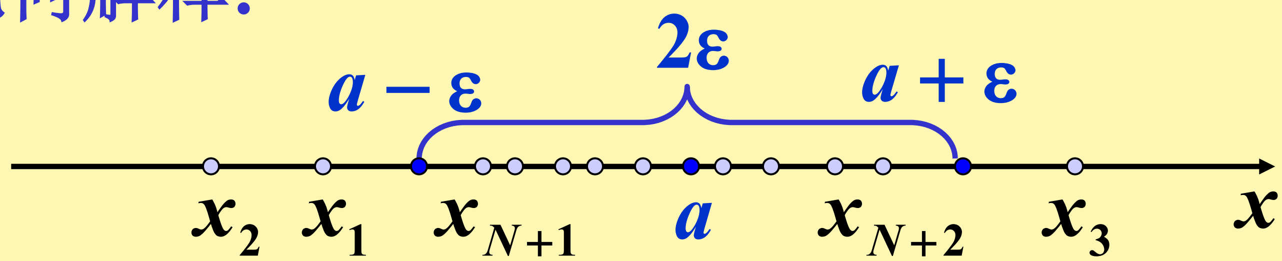
注1. ε的任意性： ε的作用在于衡量x_n与a的接近程度，ε愈小, 表明接近得越好, 有时可假设$\varepsilon < 1$! 但ε一旦给出，就应暂时看作是固定不变的，以便根据它来求N.

2. N的相应性　N一般随着ε的变小而变大，所以也可写作$N(\varepsilon)$,用来强调N对ε的依赖性. 但N不是由ε唯一确定. 对于$\forall\varepsilon$，找到满足定义要求的N_0，那么任一个大于N_0的N也可作为定义要求的N.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0,$ 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$

3. 几何解释:



当 $n > N$ 时, 所有的点 x_n 都落在 $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ 内,

只有有限个(至多只有 N 个)落在其外.

（4）从定义中可以看出，若要用定义证明极限存在, 关键在于对

$\forall \varepsilon > 0,$ 找出 N， 当 $n > N$ 时, $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立。

例 1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right)=1.$

证 因为 $|x_n-1|=\left|1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}$

所以对任给的$\varepsilon>0$, 要使$|x_n-1|<\varepsilon$, 只要$\dfrac{1}{n}<\varepsilon$,

即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$, 取$N=[\dfrac{1}{\varepsilon}]$ 则当$n>N$时,

就有$\left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|<\varepsilon$ 即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1.$

例2 设$x_n \equiv C$(C为常数), 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.

证 任给$\varepsilon > 0$, 对于一切自然数 n,

$$|x_n - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon \text{成立},$$

所以, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.

说明: 常数列的极限等于同一常数.

小结: 用定义证数列极限存在时,关键是任意给定$\varepsilon > 0$,寻找N,但不必要求最小的N.

例 证明$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$

例3 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \quad (|q|<1)$

证 若 $q=0$，$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$；

若 $0<|q|<1$，对于 $\forall\varepsilon>0$，要使 $|x_n-0|=|q|^n<\varepsilon$，

只要 $n\ln|q|<\ln\varepsilon$，即 $n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$.

所以对 $\forall\varepsilon>0$ (不妨设 $\varepsilon<1$)，取 $N=\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$，

则当 $n>N$ 时，恒有 $|q^n-0|<\varepsilon$，

$$\therefore \lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

例4 试证: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}=\dfrac{1}{3}$

证 $\forall\varepsilon>0$ $\left(\text{取}N=?,\text{使}n>N\text{时有}\left|x_n-\dfrac{1}{3}\right|<\varepsilon\right)$

先考察 $\left|\dfrac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}-\dfrac{1}{3}\right|=\left|\dfrac{5n-10}{3(3n^2+2n-4)}\right|$

当 $n\geq 2$ 时,有 $5n-10\geq 0$ 且 $3n^2+2n-4>0$,则

$$\left|\frac{5n-10}{3(3n^2+2n-4)}\right|=\frac{5n-10}{3(3n^2+2n-4)}<\varepsilon\,?$$

$$<\frac{5n}{9n^2}<\frac{1}{n}$$

放大到 $\dfrac{1}{n}\to 0$

例4 试证：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}=\dfrac{1}{3}$

$\left(\text{要使}|x_n-a|<\varepsilon,\text{只要}\dfrac{1}{n}<\varepsilon,\text{即}n>\dfrac{1}{\varepsilon}\text{即可}\right)$

$\therefore$ 对$\forall\varepsilon>0,\exists N=\max\left\{2,\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$,当$n>N$时恒有

$$\left|\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}=\dfrac{1}{3}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0,$$

当$n > N$时, 恒有$|x_n - a| < \varepsilon$

注 用定义证明极限存在的步骤（逆证法）：

(1) 考察$|x_n-a|$;

(2)适当放大不等式，为方便,有时可限定n大于某一数N_1，解出$n > N_2$；也可限定$\varepsilon < 1$

(3)取 $N = max\{N_1, N_2\}$;

(4)按ε-N语言重新叙述。

例5 证明数列$x_n=(-1)^{n+1}$是发散的。

证 假设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 由定义, 对于$\varepsilon=\dfrac{1}{2}$,

$\exists N$,使得当$n>N$时,有$|x_n-a|<\dfrac{1}{2}$成立,

即当$n>N$时,$x_n\in(a-\dfrac{1}{2},a+\dfrac{1}{2})$, 区间长度为1,

而x_n无休止地反复取 1, −1两个数, 不 可 能同时位于长度为1的区间内，矛盾。

注：$\{x_n\}$是有界的,但却发散。

四. 收敛数列的性质

定理1.2.1 (唯一性)收敛数列的极限必唯一。

证 (反证法) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = b,$ 且 $a < b,$

现取 $\varepsilon_0 = \dfrac{b-a}{2}$,由数列极限的定义知

$\exists N_1 > 0,$ 当 $n > N_1$ 时,有 $|x_n - a| < \dfrac{b-a}{2} \Rightarrow x_n < a + \dfrac{b-a}{2}$

$\exists N_2 > 0,$ 当 $n > N_2$ 时,有 $|x_n - b| < \dfrac{b-a}{2} \Rightarrow x_n > b - \dfrac{b-a}{2}$

因此,$\exists N = \max(N_1, N_2)$,当 $n > N$ 时,

有 $\dfrac{a+b}{2} < x_n < \dfrac{a+b}{2}$,矛盾

三角不等式：$\left||a|-|b|\right| \le |a \pm b| \le |a|+|b|$

数列$\{x_n\}$必有界：$\exists M>0$,对$\forall n$,有$|x_n| \le M$

定理1.2.2 (有界性) 收敛数列$\{x_n\}$必有界。

证 对$\varepsilon=1$，$\exists N>0$,当$n>N$时，有$|x_n-a|<1$

$\therefore$ 当$n>N$时 $|x_n| = |x_n-a+a| \le |x_n-a|+|a|$

$$<1+|a|$$

$\therefore \forall n, |x_n| \le M = \max\{|x_1|,|x_2|,\cdots|x_N|,1+|a|\}$

注 (1) 收敛必有界,但有界不一定收敛，例如 $\{(-1)^n\}$;

(2) 无界数列一定发散(无极限)。

收敛数列的有限四则运算法则：

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, 则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = A \pm B = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = AB$　　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{A}{B}\quad (B \neq 0)$

保号性：(1)若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, 且 $A > 0$ ， 则 $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时 $x_n > 0$;

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, 且 $A < 0$, $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时 $x_n < 0$.

保序性：设 $x_n \le y_n$ $(\exists N_0 > 0$，$n > N_0)$

且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, 则 $A \le B$.

子数列的概念

定义 在数列$\{x_n\}$中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列$\{x_n\}$中的先后次序，这样得到的一个数列称为原数列$\{x_n\}$的子数列(或子列)。

$$x_1, x_2, \cdots, x_{n_1}, \cdots, x_{n_2}, \cdots, x_{n_3}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$$

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$$

注意 (1)在子数列$\{x_{n_k}\}$中，一般项x_{n_k}是第k项，而x_{n_k}在原数列$\{x_n\}$中却是第n_k项. 显然，$n_k \geq k$。

(2) $\{x_{2k}\}$，$\{x_{2k+1}\}$是常见的子数列。

定理1.2.4 收敛数列的任一子数列也收敛，且极限相同。

证 设数列$\left\{x_{n_k}\right\}$是数列$\left\{x_n\right\}$的任一子数列，

$\because \lim_{n\to\infty} x_n = a$,（要证$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$，注意$k$是变量）

$\therefore \forall\varepsilon > 0, \exists N > 0$,当$n > N$时,恒有$\left|x_n - a\right| < \varepsilon$

取$K = N$,则当$k > K$时,$n_k > n_K = n_N \geq N$

恒有$\left|x_{n_k} - a\right| < \varepsilon$ $\therefore \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$ 证毕

定理1.2.4 收敛数列的任一子数列也收敛，且极限相同。

注 此定理可用来判别数列发散。只要找到$\{x_n\}$的一子列发散或两子列不收敛到同一极限，则原数列发散。

例如 $\{x_n\}=\{(-1)^{n-1}\}$: $1, -1, 1, -1, \cdots, 1, -1, \cdots$

它的一个子列 $1, 1, 1, \cdots$ 收敛于 1,
另一子列 $-1, -1, -1, \cdots$ 收敛于 -1,
$\Rightarrow$ 数列发散

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_{2n} = A = \lim_{n\to\infty} x_{2n-1}$$